

# 一种概率自适应图像去噪模型

易 翔, 王蔚然

(电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

**摘 要:** 从小波变换入手, 提出了一种概率自适应去噪模型. 该模型包括尺度层间模型和层内模型. 去噪方法首先利用小波域层间模型, 将小波系数分成两类: 有意义系数和无意义系数; 然后在层内概率模型下运用最大后验概率估计方法, 从有意义系数中恢复出原始系数. 我们还将这种模型引入复数小波变换域. 实验结果及分析表明了该去噪模型的有效性.

**关键词:** 小波变换; 图像去噪; 复数小波变换; 最大后验概率

**中图分类号:** TN919. 8      **文献标识码:** A      **文章编号:** 03722112 (2005) 02006204

## A Probability Model for Adaptive Image Denoising

YI Xiang, WANG Weiran

(College of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

**Abstract:** A probability model for adaptive image denoising based on the wavelet transform is proposed. The new model includes an interscale model and an intrascale model. Firstly, we use the interscale model to classify the coefficients into two classes: significant coefficients and insignificant coefficients. Secondly, the maximum a posteriori (MAP) estimator based on the intrascale model is used to restore the noisy wavelet image coefficients. The same model can be applied to the complex wavelet domain. Experimental results and analysis are given to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed model.

**Key words:** wavelet transform; image denoising; complex wavelet transform (CWT); maximum a posteriori (MAP)

### 1 引言

图像在采集、转换和传输过程中, 易受到成像设备与外部环境噪声干扰等影响, 产生图像降质, 因此图像去噪是工程中常见的问题. 近年来, 一些学者提出了基于小波系数分布统计模型的消噪方法, 取得了较好的效果. 这些方法大致可以分成两类: (1) 尺度层内模型方法, 代表性的是根据广义高斯分布 (Generalized Gaussian Distributed, GGD) 模型和最小 Bayes 代价原则提出的 BayesShrink 阈值法<sup>[1]</sup>; (2) 尺度层间模型方法, 通过寻找不同分解层次上父子系数的相关性来进行滤波, 其代表为 Crouse<sup>[2]</sup>等人提出的基于隐马尔科夫模型 (Hidden Markov Tree, HMT) 的降噪方法.

本文利用小波变换域同层和上下层小波系数的关系, 提出了一种概率自适应去噪模型. 该模型结合了尺度层间和层内两个模型的特点, 先利用小波系数层间概率模型, 将小波系数划分成两类: 有意义系数和无意义系数. 然后根据同层概率分布模型, 运用最大后验概率 (Maximum A Posteriori, MAP) 估计恢复出有用信号的小波系数. 我们还将这种去噪模型扩展到复数小波变换域.

### 2 概率模型

#### 2.1 尺度层间模型 (Interscale model)

在小波变换域上不同尺度层间的小波系数存在某种关联. Lewis 和 Knowles 在零树编码思想中<sup>[3]</sup>, 提出了这样一个假设: 在小波树上, 小波系数的父节点幅度很小时, 其子系数也很小. 这样就可以将小波系数划分成两类: 有意义系数  $W_{sig}$  类和无意义系数  $W_{isig}$  类. 算法描述为:

Compare  $|w_{m+1}|$  to  $T$ .

If  $|w_{m+1}| > T$ , put  $w_m$  into  $W_{sig}$ ;

Else, put  $w_m$  into  $W_{isig}$ .

这种思想使零树编码得到了较高的压缩比. 但是在图像去噪的应用背景下, 不同尺度的小波系数本身包含了噪声成分, 仅靠比较父节点系数大小来决定小波系数的分类, 显然会带来很大的误差. 并且门限  $T$  的选择也有一定的困难. 针对这一问题, 我们提出一个简单的层间系数概率分布模型.

$$P(w_{m+1}, w_m) = \frac{2}{PR_1R_2} \exp \left[ -2 \sqrt{\frac{w_{m+1}^2}{R_1^2} + \frac{w_m^2}{R_2^2}} \right] \quad (1)$$

式中  $w_{m+1}$ 、 $w_m$  分别为小波树上的父、子节点系数,  $R_1$ 、 $R_2$  分别为父、子节点系数的标准方差. 由此模型可得到, 在高斯白噪声干扰情况下新的小波分类准则. 令  $w_{m+1}$ 、 $w_m$  分别为小波树上的父、子节点含噪的观测系数值. 定义一个函数  $f(w_{m+1}, w_m)$ ,

$$f(w_{m+1}, w_m) > \sqrt{(R_1 w_{m+1})^2 + (R_2 w_m)^2} - 2R_n^2 \quad (2)$$

则分类新准则为:

Calculate  $f(w_{m+1}, w_m)$ .

Compare  $f(w_{m+1}, w_m)$  to 0.

If  $f(w_{m+1}, w_m) > 0$ , put  $w_m$  into  $W_{sig}$ ;

Else, put  $w_m$  into  $W_{sig}$ .

证明 含噪小波系数可以看成由两部分组成:

$$\begin{cases} w_{m+1} = w_{m+1} + n_1 \\ w_m = w_m + n_2 \end{cases} \quad (3)$$

在白噪声干扰的情况下, 可以认为噪声  $n_1$ 、 $n_2$  服从  $N(0, R_n^2)$  独立同分布.

由最大后验概率 MAP 估计理论可知,

$$\hat{w} = \arg \max_w \{P(w/wc)\} \quad (4)$$

根据贝叶斯定理, 用先验概率密度计算无噪声的小波系数后验概率密度, 得到 MAP 的等价形式,

$$\hat{w} = \arg \max_w \{\log P(wc - w) + \log P(w)\} \quad (5)$$

由此式和式(1)可得到以下方程,

$$\begin{cases} \frac{w_{m+1} - \hat{w}_{m+1}}{R_n^2} - \frac{2\hat{w}_{m+1}/R_1^2}{\sqrt{\frac{\hat{w}_{m+1}^2}{R_1^2} + \frac{\hat{w}_m^2}{R_2^2}}} = 0 \\ \frac{w_m - \hat{w}_m}{R_n^2} - \frac{2\hat{w}_m/R_2^2}{\sqrt{\frac{\hat{w}_{m+1}^2}{R_1^2} + \frac{\hat{w}_m^2}{R_2^2}}} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\hat{w}_{m+1}$ 、 $\hat{w}_m$  分别为父系数  $w_{m+1}$ 、子系数  $w_m$  的最大后验概率估计值. 此方程的解没有明确的解析式, 但有如下关系式:

$$\begin{cases} R_1 \hat{w}_{m+1} - R_1 w_{m+1} = -2R_n^2 \frac{\hat{w}_{m+1}}{R_1} \sqrt{\frac{\hat{w}_{m+1}^2}{R_1^2} + \frac{\hat{w}_m^2}{R_2^2}} \\ R_2 \hat{w}_m - R_2 w_m = -2R_n^2 \frac{\hat{w}_m}{R_2} \sqrt{\frac{\hat{w}_{m+1}^2}{R_1^2} + \frac{\hat{w}_m^2}{R_2^2}} \end{cases} \quad (7)$$

由上式分析可知,  $\hat{w}_{m+1}$  与  $w_{m+1}$  同号,  $\hat{w}_m$  与  $w_m$  同号, 并且  $|\hat{w}_{m+1}| \leq |w_{m+1}|$ ;  $|\hat{w}_m| \leq |w_m|$ . 将式(7)进一步整理可得,

$$(R_1 \hat{w}_{m+1} - R_1 w_{m+1})^2 + (R_2 \hat{w}_m - R_2 w_m)^2 = 4R_n^4 \quad (8)$$

如果  $(R_1 w_{m+1})^2 + (R_2 w_m)^2 < 4R_n^4$ , 显然方程式(6)无解, 则  $\hat{w}_{m+1} = 0$ ,  $\hat{w}_m = 0$ . 因此我们可以用此条件作为含噪情况下小波系数分类的标准, 这样就得到了一个和噪声能量  $R_n^2$  有关的自适应判决公式(2).

通过以上证明我们发现: 在新的分类准则下, 子系数的类别划分不仅由其父系数幅度大小决定, 而且和它自身的大小有关, 并且还和噪声能量  $R_n^2$  自适应相关. 这是与零树思想区别的根本所在, 也使得我们的分类标准更适合于在公式(3)所给出的噪声模型下工作.

通过层间模型, 得到了两类小波系数. 由于小波系数集满

足稀疏特性, 故在去噪时, 对无意义小波系数  $W_{sig}$  直接置零; 对于有意义小波系数  $W_{sig}$ , 在尺度层内模型上运用 MAP 估计, 恢复出原图像的小波系数.

## 2.1.2 尺度层内模型(Intrascale model)

广义高斯分布(GGD)<sup>[4]</sup>是对自然图像小波系数分布很好的近似.

$$P(w) = \frac{\sqrt{G(v)}}{2T(1/v)R} \exp[-(G(v)|w|/R)]^v \quad (9)$$

其中  $v$  为形状因子,  $T(x) = \int_0^x u^{x-1} \exp(-u) du$  为伽马函数,  $G$

$(v) = \sqrt{T(3/v)/T(1/v)}$ ,  $R$  为标准方差. 一般自然图像小波系数分布的形状因子  $v$  为 0.5~1. 为了计算方便和便于估计模型参数(减少一个待估计的参数, 提高了处理的速度), 选择  $v=1$ , 则式(9)变为,

$$P(w) = 1/(\sqrt{2}R) \exp[-(\sqrt{2}|w|/R)] \quad (10)$$

这其实就是 Laplacian 分布. 采用 MAP 估计得:

$$\hat{w} = wc - \sqrt{2}R_n^2/R, \hat{w} > 0 \quad (11)$$

由此可得到一个小波收缩函数,

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \text{sign}(wc) \# \max(|wc| - \sqrt{2}R_n^2/R, 0) \\ &= \text{Soft}(wc, \sqrt{2}R_n^2/R) \end{aligned} \quad (12)$$

从本质上看, 上式其实就是一个软阈值 Soft 收缩函数. 对同一分解层次上的有意义小波系数用式(12)进行系数收缩, 就得到原始图像小波系数的估计.

## 3 图像去噪算法的步骤

图像降噪的具体步骤如下:

Step1. 将待处理图像进行多级小波分解;

Step2. 估计噪声系数的标准方差  $R_n$  和概率模型的参数  $R_1$ 、 $R_2$ .

Step3. 用层间模型对小波系数进行分类, 对无意义的小波系数直接置零处理, 对有意义的小波系数运用层内模型得到的收缩函数进行恢复. 具体算法描述为:

Loop for each wavelet scale m

{ Loop for each pixel point i, j

{ Estimate  $R_n$ ,  $R_1[i, j]$ ,  $R_2[i, j]$

Calculate  $f(w_{m+1}[i, j], w_m[i, j])$

If  $f(w_{m+1}[i, j], w_m[i, j]) \leq 0$ ,  $\hat{w}_m[i, j] = 0$ ;

Else  $\hat{w}_m[i, j] = \text{Soft}(w_{m+1}[i, j], \sqrt{2}R_n^2/R_2[i, j])$

} End loop i, j

} End loop m

Step4. 用新系数进行逆复数小波变换, 得到降噪图像.

## 4 复数小波变换(CWT)

多数小波去噪方法都局限在基于实值离散小波变换(DWT)方法的研究. 但对于图像特征提取及去噪来说, DWT 有两个缺点影响其性能的提升. (1) 缺乏平移不变性. 即输入信号微小的位移, 会导致各子带小波系数能量分布的较大变化; (2) 方向选择性差. 由于 DWT 滤波器都为实数可分离的滤

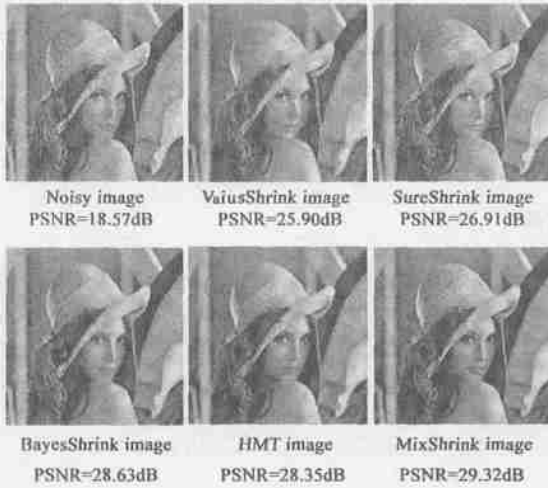


图 1 基于 DWT 图像降噪效果的对比



图 2 基于 CWT 图像降噪效果的对比

波器, 所以 DWT 小波系数只有水平、垂直和对角线 3 个方向选择<sup>[5]</sup>. Kingsbury 提出的双树复小波变换(DualTree Complex Wavelet Transform, DTCWT)<sup>[6]</sup>是解决问题的好方法. DTCWT 具有以下特点:

(1) 近似的平移不变性, 信号经 DTCWT 后, 各子带都输出实部和虚部, 产生了数据冗余, 因此使之具有近似的平移不变性;

(2) 多方向选择特性, 对于二维 DTCWT, 每一级二维分解都得到六个复数带通子图, 对应  $1\mathfrak{b}$ ,  $4\mathfrak{b}$  和  $7\mathfrak{b}$  多方向选择属性;

(3) 计算效率高, 同其他冗余小波变换(如静态小波变换 stationary wavelet transform、非抽样小波变换 undecimated wavelet transform) 相比, 计算复杂度小, 占用内存空间少, 易于实现.

DTCWT 复数小波变换的这些特点, 可以提高算法去噪的性能. 前面推导的概率混合模型同样适用于复数小波变换(CWT). 类似于 DWT, 复数小波树上的父、子节点系数分类的标准由式(2)变为:

$$f(\mathbf{w}_{m+1}, \mathbf{w}_m) = \sqrt{(R_1 |\mathbf{w}_{m+1}|)^2 + (R_2 |\mathbf{w}_m|)^2} - 2R_n^2 \quad (13)$$

式中  $\mathbf{w}_{m+1}$ 、 $\mathbf{w}_m$  分别为父、子节点含噪的观测复数小波系数值. 复数小波层内模型收缩函数变为:

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}_c}{|\mathbf{w}_c|} \# \max(|\mathbf{w}_c| - \sqrt{2R_n^2}, R, 0) \quad (14)$$

显然若  $\mathbf{w}_c$  为实数时, 公式(14)同式(12)是等价的. 去噪步骤同 DWT 的方法.

## 5 数值实验及结论

为了估计去噪效果, 对 Lena 标准图像进行处理. 分别采用以下方法: 通用阈值法(VisuShrink)<sup>[7]</sup>; Stein 无偏风险估计(Unbiased Risk Estimate) 阈值法(SureShrink)<sup>[8]</sup>; Bayes 风险最小的阈值法(BayesShrink)<sup>[1]</sup>; HMT<sup>[2]</sup>和复数隐马尔科夫模型方法(CHMT)<sup>[9]</sup>; 基于复数小波变换的双变量小波收缩法(BiShrink)<sup>[10]</sup>; 以及本文提出的离散小波变换混合概率模型方法(MixShrink)和复数小波概率模型去噪方法(CMixShrink). 图像降噪性能采用峰值信噪比(PSNR)来衡量. 图 1、2 是不同方法对含噪 Lena 图像降噪效果. 图 3 是不同噪声方差的情况下, 各方法对 Lena 测试图像滤波得到的峰值信噪比曲线. 实验结果表明:

(1) 本方法去噪效果明显, 人眼能直观感觉图像质量的改善. 从图 3 还可看出图像噪声水平较大时, 本文提出的 MixShrink 和 CMixShrink 均优于同类方法. 并且该方法也优于

Wiener 滤波、中值滤波等常用非小波降噪方法, 限于篇幅原因, 这里就不给出详细结果.

(2) 我们还发现基于复数小波变换 CWT 的方法较 DWT 方法的降噪效果有明显提高. 这主要是因为 DWT 没有平移不变性, 而 CWT 利用其有限的冗余度实现了近似的平移不变性, 因此基于 CWT 的算法去噪效果更好.

(3) 另外最重要的一点的是, 由于 CWT 具有平移不变性, 使得小波系数的奇异表现在相同位置(可近似认为), 即小波系数上下尺度间父子关系更明确, 这样使我们提出层间模型的假设条件成立(见 2.1 节). 由此本文所提出的概率模型更适合于 CWT 变换域. 通过数值实验结果也可看出 CMixShrink 方法降噪效果最好.

## 6 结束语

本文提出的方法与现有的小波阈值方法有类似之处: 都利用了小波系数的稀疏特性. 所不同的是: 我们首先利用小波系数的父子关系, 运用层间模型, 对小波系数进行分类, 然后对有意义的小波系数运用层内概率模型的最大后验估计进行软阈值收缩, 以此实现图像滤波去噪. 我们还把这一模型扩展到复数小波变换域, 使得方法更稳定、有效. 同常用的小波阈

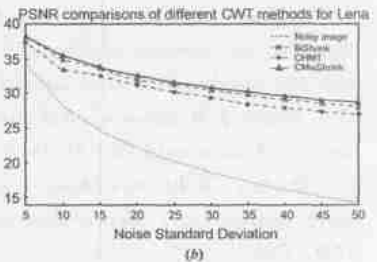
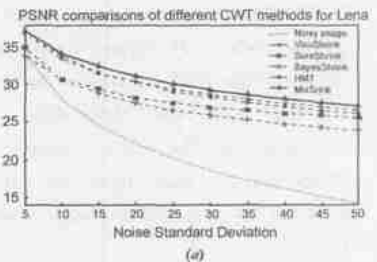


图 3 不同方法对 Lena 图像处理结果. (a) 为基于 DWT 的方法, (b) 为基于 CWT 的方法

值方法相比, 本文的算法计算量稍大, 但在许多情况下不影响其在实际工程中的应用.

#### 参考文献:

- [ 1 ] S Chang, B Yu, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(9): 1532- 1546.
- [ 2 ] M S Crouse, R D Nowak. Wavelet-based signal processing using hidden markov models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(4): 886- 902.
- [ 3 ] A S Lavis, G Knowles. Image compressing using the 2d wavelet transform [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(2): 224- 250.
- [ 4 ] E P Simoncelli, E H Adelson. Noise removal via Bayesian wavelet cor2ing[A]. Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing[C]. Lausanne, Switzerland: IEEE, 1996, 1: 379- 382.
- [ 5 ] N G Kingsbury. The dualtree complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement[A]. Proc. EUSIPCO 98[C]. Island of Rhodes, Greece: EVRASIP, 1998. 319- 322.
- [ 6 ] N G Kingsbury. A dualtree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties[A]. Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing[C]. Vancouver, Canada: IEEE, 2000, 2: 375- 378.
- [ 7 ] D L Donoho, I M Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425- 455.
- [ 8 ] D L Donoho, I M Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. J American Statistical Assoc., 1995, 90(432): 1200- 1224.

- [ 9 ] J K Romberg, H Choi, R G Baraniuk. Hidden Markov tree modeling of complex wavelet transforms[A]. Proc. IEEE ICASSP2000[C]. Istanbul, Turkey: IEEE, 2000. 674- 693.
- [ 10 ] L Sendur, I W Selesnick. Bivariate shrinkage function for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(11): 2744- 2756.

#### 作者简介:



**易翔** 男, 1975 年出生于四川, 1998 年毕业于天津大学电子工程系, 获学士学位, 现为电子科技大学电子工程学院硕博连读研究生, 主要从事数字信号与图像处理、信息隐藏、数字水印、计算机仿真方面的研究, 已发表论文多篇. E-mail: e-yixiang@hotmail.com.



**王蔚然** 女, 1939 年出生, 电子科技大学教授、博士生导师, 电子学会会士, 中国宇航学会遥测专业委员会委员, 主要研究方向: 信息获取、传输、处理与多媒体界面, 激光成像系统与技术, 信息安全, 分布式防火墙等.